Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Klausur 2 — QUANTENMECHANIK — WS 2002/03

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Der Translationsoperator $\hat{T}_a$ hat die Eigenschaft

$$\hat{T}_a f(x) = f(x+a).$$

Wann ist die Funktion $\cos kx$ Eigenfunktion von $\hat{T}_a$? Wie lauten die Eigenwerte?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie $[\hat{A}, \hat{B}]^+$ für den Fall, daß $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren sind.

b) Prüfen Sie ob zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, die miteinander kommutieren ($[\hat{A}, \hat{B}] = 0$), nach einer unitären Transformation noch vertauschbar sind?

c) Zeigen Sie, daß für einen unitären Operator $\hat{U}$ die Zustandsvektoren

$$|\phi_n\rangle = \hat{U}\,|\psi_n\rangle$$

orthonormiert sind, falls $\{|\psi_n\rangle\}$ einen vollständigen orthonormierten Satz bildet.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte für den Operator $\hat{\sigma}_n = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$, der die Projektion des Spinoperators $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ auf eine Richtung $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\theta, \phi)$ ($|\mathbf{n}| = 1$, θ: Polarwinkel, ϕ: Azimutwinkel) darstellt. Der Operator $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ enthält die Paulischen Spinmatrizen:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, daß für einen beliebigen Vektor $\mathbf{a}$ gilt:

$$(\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^k = \begin{cases} \mathbf{1}\,\mathbf{a}^k & \text{für } k = 0, 2, 4, \ldots \\ \mathbf{1}\,\mathbf{a}^{k-1}\,(\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}) & \text{für } k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases} \quad \text{mit } \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vereinfachen Sie damit den Operator $\hat{F} = \exp\{i\,\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\}$.

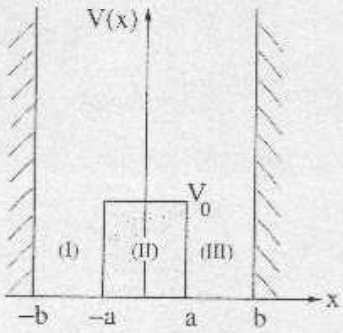
Bitte wenden!

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle r \rangle$ für das Wasserstoffatom im Grundzustand. Die Wellenfunktion des Wasserstoffatoms im Grundzustand ist $\varphi_{1s}(\mathbf{r}) = (\pi a_0^3)^{-1/2} exp(-r/a_0)$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Wie groß muß die Höhe der Schwelle in der Abbildung gewählt werden, damit die Energie des Grundzustandes $E_0 = V_0$ wird? Skizzieren Sie den Verlauf der Wellenfunktion!



Mathematik:

$$\int_0^\infty dx\, x^n \exp(-x) = n!$$