Aufgabe 1 (4P)

Da $[\hat{\rho}, \hat{H}] = 0$ haben $\hat{\rho}$ und $\hat{H}$ ein gemeinsames System von Eigenfunktionen:

$$\hat{\rho}\,|\varphi_n\rangle = e^{-\beta\hat{H}}\,|\varphi_n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!}\,\hat{H}^k\,|\varphi_n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!}\,E_n^k\,|\varphi_n\rangle = e^{-\beta\,E_n}\,|\varphi_n\rangle.$$

Eigenfunktionen sind also $|\varphi_n\rangle$ und Eigenwerte $exp(-\beta\,E_n)$.

Aufgabe 2 (8P)

$|\psi\rangle$ ist kein Eigenzustand von $\hat{H}$, da $\hat{H}|\psi\rangle = \frac{4}{5}\,E_1\,|1\,0\,0\rangle + \frac{3i}{5}\,E_2|2\,1\,1\rangle$ und $E_1 \neq E_2$ ist, d.h $\hat{H}|\psi\rangle \neq E\,|\psi\rangle$.

Berechnung der Erwartungswerte:

Aus $\hat{H}\,|n\,l\,m\rangle = E_n\,|n\,l\,m\rangle$ folgt $\hat{H}|\psi\rangle = \frac{4}{5}\,E_1\,|1\,0\,0\rangle + \frac{3i}{5}\,E_2|2\,1\,1\rangle$. Nun muß man von links $\langle\psi| = \frac{4}{5}\,\langle 100| - \frac{3i}{5}\,\langle 211|$ multiplizieren und die Orthogonalität der Funktionen $|nlm\rangle$ ausnutzen:

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \frac{16}{25}\,E_1 + \frac{9}{25}\,E_2 = -\frac{\epsilon^2}{2a_0}\,\frac{73}{100}.$$

(*Man beachte, daß bei der Bildung von $\langle\psi|$ die konjugiert komplexen Konstanten zu nehmen sind!*)

Aus $\hat{l}_z\,|nlm\rangle = \hbar m\,|nlm\rangle$ folgt $\langle\hat{l}_z\rangle = \frac{9}{25}\,\hbar$.

Mit $\hat{\vec{l}}^2\,|nlm\rangle = \hbar^2 l(l+1)\,|nlm\rangle$ erhält man $\langle\hat{\vec{l}}^2\rangle = \frac{18}{25}\,\hbar^2$.

Aufgabe 3 (4P)

Der Operator $\hat{H}$ hat dieselben Eigenfunktionen wie $\hat{\vec{l}}^2$, was gerade die Kugelflächenfunktionen $|Y_{lm}\rangle \equiv |lm\rangle$ sind. Die Eigenwerte erhält aus $\hat{H}\,|lm\rangle = \frac{1}{2\,\Theta}\,\hbar^2\,l(l+1)\,|lm\rangle$ mit $l = 0, 1, 2\ldots$ und $m = -l, -l+1, \ldots, l$.

Entartung: Jeder Eigenwert ist $2l+1$-fach entartet.

Aufgabe 4 (8P)

Zeitabh. Störungsrechnung mit $V_1(t) = k_1\,x\,e^{-\lambda\,t}$, wobei der Anfangszustand der Grundzustand und der Endzustand der erste angeregte Zustand des eindim. harmonischen Oszillators sind:

$$c_{n=1}^{(1)}(t\to\infty) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^{\infty} e^{i/\hbar(E_1-E_0)t}\,\langle\varphi_1|V_1(t)|\varphi_0\rangle = \frac{k_1}{i\hbar}\,\langle\varphi_1|x|\varphi_0\rangle\int_0^{\infty} e^{(i\omega-\lambda)t}.$$

Ausführung der Zeitintegration:

$$\int_0^\infty e^{(i\omega-\lambda)t}. = \frac{e^{(i\omega-\lambda)t}}{i\omega-\lambda}|_0^\infty = \frac{-1}{i\omega-\lambda}.$$

Berechnung $\langle\varphi_1|x|\varphi_0\rangle$ m.H. $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ ergibt

$$\langle\varphi_1|x|\varphi_0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle\varphi_1|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|\varphi_0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

($\hat{a}^\dagger|\varphi_0\rangle = |\varphi_1\rangle$; $\hat{a}|\varphi_0\rangle = 0$)

Übergangswahrscheinlichkeit für $n = 1$:

$$|c_1|^2 = \frac{k_1^2}{2m\hbar\omega}\,\frac{1}{\lambda^2+\omega^2}.$$

Aufgabe 5 (4P)

Die Zeitableitung des Erwartungswertes eines Operators, der nicht explizit von der Zeit abhängt erhält man aus

$$\frac{d}{dt}\,\langle\hat{\vec{s}}\rangle = \frac{i}{\hbar}\,\langle\,[\hat{H}, \hat{\vec{s}}]\,\rangle = \frac{2\,i\,\omega_L}{\hbar}\,\langle\,[\hat{s}_z,\,\hat{\vec{s}}]\,\rangle.$$

Mit $\hat{\vec{s}} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$ und den Vertauschungsrelationen für Drehimpulse folgt dann:

$$\frac{d}{dt}\,\langle\hat{\vec{s}}\rangle = 2\,\omega_L\,\langle(-\hat{s}_y, \hat{s}_x, 0)\rangle.$$