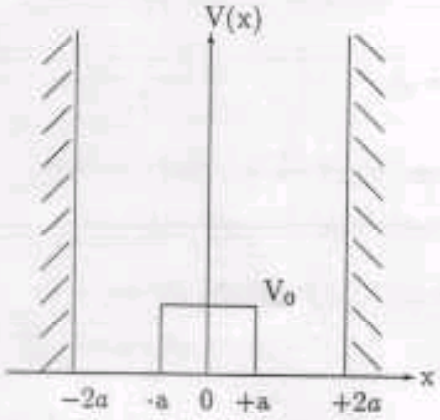
Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Abschlußklausur QUANTENTHEORIE WS 98/99

Aufgabe 1

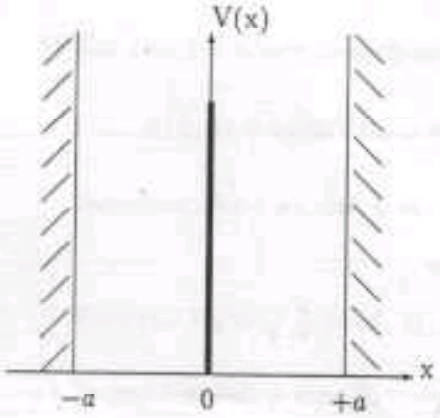


Gegeben ist das nebenstehende Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad |x| > 2a \\ 0 & \text{für} \quad a < |x| < 2a \\ V_0 & \text{für} \quad 0 < |x| < a. \end{cases}$$

Bestimmen Sie a so, daß für die Grundzustandsenergie $E_0 = V_0$ gilt.

Aufgabe 2



Geben Sie die Energieeigenwertbedingung für folgendes Potential an:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m}\beta\,\delta(x) & |x| < a; \quad \beta > 0 \\ \infty & |x| > a. \end{cases}$$

Diskutieren Sie das Ergebnis qualitativ, und vergleichen Sie es mit dem Ergebnis im Grenzfall $\beta \to \infty$.

Aufgabe 3

Der Hamiltonoperator habe die Gestalt

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \vec{a}\cdot\vec{r},$$

wobei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist. Berechnen Sie den Kommutator $[H\,,\,\vec{p}]$.

Aufgabe 4

Gegeben ist der Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ mit

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{2}{\hbar} a S_z \quad \text{und} \quad H_1 = \frac{2}{\hbar} b S_x,$$

wobei a, b Konstanten sind und S_z, S_x die z- bzw. x-Komponente des Spinoperators darstellen:

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Funktionen $\psi_\pm = \phi_{1s}(\mathbf{r})\,\chi_\pm$ Eigenfunktionen von H_0 sind, wobei ϕ_{1s} den Grundzustand im H-Atom darstellt und $\chi_\pm$ Eigenfunktionen von S_z sind.

b) Lösen Sie die SG $H\psi = E\psi$ für $\psi = \phi_{1s}(\mathbf{r})(\alpha\,\chi_+ + \beta\,\chi_-)$, wobei α, β Konstanten sind. Geben Sie E an.

Aufgabe 5

Gegeben ist der Hamiltonoperator für einen Rotator mit zwei Freiheitsgraden (ϑ, φ)

$$H = \frac{1}{2a}\vec{L}^2, \quad a: \text{reell}, \quad \vec{L}: \text{Operator des Bahndrehimpulses.}$$

a) Geben Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte von H an.

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das physikalische System im Zustand

$$\psi(\vartheta, \varphi) = c(\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta), \quad c = \text{konst.}$$

Berechnen Sie c so, daß ψ ein normierter Zustand ist.

Hinweis: $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$, $Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$

c) Zeigen Sie, daß ψ eine Eigenfunktion von H ist, und berechnen Sie die Erwartungswerte von H und L_z in diesem Zustand.

Aufgabe 6

Geben Sie entsprechend der Hundschen Regel die Drehimpulswerte J, S, L für ein Vanadium Atom (V) im Grundzustand an. Die Elektronenkonfiguration ist durch vollbesetzte Niveaus und das mit 3 Elektronen besetzte $3d$-Niveau bestimmt.