Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Klausur 2 — QUANTENMECHANIK — WS 2002/03

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Der Translationsoperator $\hat{T}_a$ hat die Eigenschaft

$$\hat{T}_a f(x) = f(x+a).$$

Wann ist die Funktion $\cos kx$ Eigenfunktion von $\hat{T}_a$? Wie lauten die Eigenwerte?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie $[\hat{A},\hat{B}]^\dagger$ für den Fall, daß $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren sind.

b) Prüfen Sie ob zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, die miteinander kommutieren ($[\hat{A},\hat{B}] = 0$), nach einer unitären Transformation noch vertauschbar sind?

c) Zeigen Sie, daß für einen unitären Operator $\hat{U}$ die Zustandsvektoren

$$|\phi_n\rangle = \hat{U}\,|\psi_n\rangle$$

orthonormiert sind, falls $\{|\psi_n\rangle\}$ einen vollständigen orthonormierten Satz bildet.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte für den Operator $\hat{\sigma}_n = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$, der die Projektion des Spinoperators $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ auf eine Richtung $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\theta,\phi)$ ($|\mathbf{n}| = 1$, θ: Polarwinkel, ϕ: Azimutwinkel) darstellt. Der Operator $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ enthält die Paulischen Spinmatrizen:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, daß für einen beliebigen Vektor $\mathbf{a}$ gilt:

$$(\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})^k = \begin{cases} \mathbf{1}\,\mathbf{a}^k & \text{für } k = 0,2,4,\ldots \\ \mathbf{1}\,\mathbf{a}^{k-1}\,(\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}) & \text{für } k = 1,3,5,\ldots \end{cases} \quad \text{mit } \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vereinfachen Sie damit den Operator $\hat{F} = \exp(i\,\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ein Teilchen (Masse μ, Ladung q) befinde sich in einem dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit der potentiellen Energie $V(r) = \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2$, sein Spektrum sei

$$E_{n_r l} = \hbar\omega\,(2n_r + l + 3/2)$$

mit n_r als radialer Quantenzahl ($n_r = 0, 1, 2, \ldots$) und l als Quantenzahl des Bahndrehimpulses ($l = 0, 1, 2, \ldots$). Der harmonische Oszillator befinde sich in einem schwachen konstanten homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$.

a) Zeigen Sie, daß der Hamilton-Operator in der Form

$$\hat{H} \approx \hat{H}_0 - \frac{q}{\mu}\,\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{p}} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2$$

geschrieben werden kann, und für ein konstantes homogenes Magnetfeld mit $\mathbf{B} = B_0\,\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{r}\times\mathbf{B}$ die folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}\,B_0\,\hat{L}_z.$$

b) Geben Sie die Änderung des Energiespektrums des Oszillators durch das Magnetfeld an. Diskutieren Sie das Ergebnis für die drei tiefsten Energiezustände im Oszillatorpotential. Das Teilchen habe den Spin Null.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Ein System, beschrieben durch einen zeitunabhängigen Operator $\hat{H}_0$, habe die Eigenwerte E_n und Eigenfunktionen $\varphi_n(\mathbf{r})$. Zur Zeit $t = 0$ wird eine zeitabhängige Störung $\hat{H}_1(t) = f(t)\,V_1(\mathbf{r})$ eingeschalten mit $f(0) = 0$ und $f(t) = 1$ für $t > t_0$. Die Funktion $f(t)$ soll sich mit der Zeit t nur sehr langsam ändern, d.h.

$$\frac{df(t)}{dt} \ll \frac{E_f - E_i}{\hbar}\,f(t) \quad \forall\, t.$$

a) Führen Sie in dieser Näherung die Zeitintegration in der Berechnung von

$$c_f(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\,e^{i/\hbar(E_f - E_i)\,t'}\,\left(\varphi_f,\,\hat{H}_1(t')\,\varphi_i\right)$$

aus (partielle Integration) und zeigen Sie

$$-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\,e^{i/\hbar(E_f - E_i)\,t'}\,f(t') \to \frac{e^{i/\hbar(E_f - E_i)\,t}}{E_i - E_f} \quad \text{für} \quad t \gg t_0.$$

b) Geben Sie die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ des gestörten Systems in erster Störungsordnung für $t \gg t_0$ an, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand φ_0 von $\hat{H}_0$ befand. Zeigen Sie, daß $\psi(\mathbf{r}, t)$ in erster Störungsordnung den Grundzustand von $\hat{H} = \hat{H}_0 + V_1(\mathbf{r})$ darstellt.