Einführung in Theoretische Physik – Sommersemester 2007

Nach-Klausur am 11. September 2007

Dozenten: J. Kantelhardt und W. Seifert

Zugelassene Hilfsmittel: ausgeteiltes Formelblatt zu Koordinatensystemen und eine selbst mit Formeln beschriebene DIN A4 Seite.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Der eindimensionale freie Fall mit Reibung wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\dot{v} + \gamma v = g \qquad \text{mit} \qquad v = \dot{x},$$

wobei die Erdbeschleunigung g in Richtung der x-Achse weist. Lösen Sie hier das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = g \; ; \qquad x(0) = x_o \; , \quad \dot{x}\,(0) = v_o$$

mit einem e-Ansatz und geben Sie $x(t)$ sowie $v(t)$ an!
Beachten Sie dabei, dass es sich um eine inhomogene Differentialgleichung handelt!

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Die Differentialgleichung für den eindimensionalen Fall bzw. Wurf ohne Reibung lautet

$$m\ddot{z} = -mg,$$

wobei die Erdbeschleunigung jetzt in Richtung negativer z-Werte weist.

a) Leiten Sie daraus den Energiesatz ab!

b) Berechnen Sie $t(z)$ aus dem Energiesatz durch Integration mittels Trennung der Variablen!

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $z(t)$ aus $t(z)$ durch Quadratur!

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Ein zeitperiodischer Vorgang eines schwingungsfähigen Systems der Masse m wird durch folgende komplexe Darstellung beschrieben:

$$x(t) = (2+i)\, e^{2it} + B\, e^{-2it} \; .$$

a) Berechnen Sie die Konstante B aus der Forderung, dass $x(t)$ reell ist und geben Sie die reelle Darstellung für $x(t)$ an!

b) Wie groß ist die Periodendauer T der Schwingung?

c) Berechnen Sie die Amplitude a der Schwingung aus einer alternativen reellen Darstellung! Wie groß ist die Gesamtenergie des Systems!

Aufgabe 4:

(6 Punkte)

Eine Kurve in der x-y-Ebene ist durch folgende implizite Gleichung gegeben:

$$(x^2 + y^2)^2 = xy \qquad \text{mit } x \geq 0 \text{ und } y \geq 0.$$

a) Schreiben Sie die Gleichung in Polarkoordinaten (r, φ mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$; $0 \leq \varphi \leq \pi/2$) um, so dass Sie $r(\varphi)$ erhalten!
Hinweis: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

b) Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve für $0 \leq \varphi \leq \pi/2$!

c) Berechnen Sie $r'(\varphi)$!

d) Geben Sie $\dot{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ in Abhängigkeit von φ an unter der Annahme, dass $\dot{\varphi} = \omega_0$ konstant ist!

Aufgabe 5:

(6 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung mit kartesischen Koordinaten, dass eine ebene Zentralkraft $\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r$ stets konservativ ist. r und $\vec{e}_r$ sind dabei in der x-y-Ebene definiert.

Anleitung: Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, und beachten Sie dabei, dass auch innere Ableitungen auftreten, weil $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$ von den Koordinaten x und y abhängen; Letzteres wegen $\varphi = \arctan(y/x)$. Hinweis: $\frac{d}{dx}\arctan x = 1/(1 + x^2)$.

Viel Erfolg!