Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Nachklausur QUANTENMECHANIK WS 2002/03

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $[e^{\hat{A}}, \hat{B}] = 0$ für $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

b) $\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^{\dagger} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ (eindim. Impulsoperator).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{S}}$ im Zustand $|s\,m_s\rangle$, der ein Eigenzustand von $\hat{\mathbf{S}}^2$ und $\hat{S}_z$ ist. $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ist ein beliebiger konstanter Vektor und $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Ein Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ (Masse μ) befinde sich im Potential des dreidimensionalen harmonischen Oszillators $V(r) = \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2$. Ohne Spin-Bahn-Kopplung werden die Zustände des Teilchens durch die Quantenzahlen n_r (Knotenzahl), l, m, s und m_s beschrieben und die Energieeigenwerte lauten $E_{n_r l} = \hbar\omega\,(2\,n_r + l + 3/2)$.

Die allgemeine Form der Spin-Bahn-Kopplung eines Teilchens im Potential $V(r)$ lautet:

$$\hat{H}_{LS} = \frac{1}{2\mu^2 c^2}\,\hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{S}}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV(r)}{dr}.$$

a) Zeigen Sie, daß für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator gilt

$$\hat{H}_{LS} = \frac{\omega^2}{4\mu c^2}\left(\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{S}}^2\right),$$

wobei $\hat{\mathbf{J}}$ den Gesamtdrehimpuls darstellt.

b) Geben Sie die Quantenzahlen an, die den Zustand des Teilchens unter Einbeziehung der Spin-Bahn-Kopplung beschreiben.

c) Diskutieren Sie den Einfluß der Spin-Bahn-Kopplung auf die beiden niedrigsten Energiewerte des Oszillators.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ein Teilchen (Masse μ, Ladung q) befinde sich in einem dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit der potentiellen Energie $V(r) = \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2$, sein Spektrum sei

$$E_{n_r,l} = \hbar\omega\,(2n_r + l + 3/2)$$

mit n_r als radialer Quantenzahl ($n_r = 0, 1, 2, \ldots$) und l als Quantenzahl des Bahndrehimpulses ($l = 0, 1, 2, \ldots$). Der harmonische Oszillator befinde sich in einem schwachen konstanten homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$.

a) Zeigen Sie, daß der Hamilton-Operator in der Form

$$\hat{H} \approx \hat{H}_0 - \frac{q}{\mu}\,\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{p}} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2$$

geschrieben werden kann, und für ein konstantes homogenes Magnetfeld mit $\mathbf{B} = B_0\,\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{r}\times\mathbf{B}$ die folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}\,B_0\,\hat{L}_z.$$

b) Geben Sie die Änderung des Energiespektrums des Oszillators durch das Magnetfeld an. Diskutieren Sie das Ergebnis für die drei tiefsten Energiezustände im Oszillatorpotential. Das Teilchen habe den Spin Null.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Ein System, beschrieben durch einen zeitunabhängigen Operator $\hat{H}_0$, habe die Eigenwerte E_n und Eigenfunktionen $\varphi_n(\mathbf{r})$. Zur Zeit $t = 0$ wird eine zeitabhängige Störung $\hat{H}_1(t) = f(t)\,V_1(\mathbf{r})$ eingeschalten mit $f(0) = 0$ und $f(t) = 1$ für $t > t_0$. Die Funktion $f(t)$ soll sich mit der Zeit t nur sehr langsam ändern, d.h.

$$\frac{df(t)}{dt} \ll \frac{E_f - E_i}{\hbar}\,f(t) \quad \forall\, t.$$

a) Führen Sie in dieser Näherung die Zeitintegration in der Berechnung von

$$c_f(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\,e^{i/\hbar(E_f - E_i)t'}\,\left(\varphi_f,\,\hat{H}_1(t')\,\varphi_i\right)$$

aus (partielle Integration) und zeigen Sie

$$-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\,e^{i/\hbar(E_f - E_i)t'}\,f(t') \to \frac{e^{i/\hbar(E_f - E_i)}}{E_i - E_f} \quad \text{für} \quad t \gg t_0.$$

b) Geben Sie die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ des gestörten Systems in erster Störungsordnung für $t \gg t_0$ an, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand φ_0 von $\hat{H}_0$ befand. Zeigen Sie, daß $\psi(\mathbf{r}, t)$ in erster Störungsordnung den Grundzustand von $\hat{H} = \hat{H}_0 + V_1(\mathbf{r})$ darstellt.